# ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ

## Generalized beauty: the product of the many digit number that every digit is 9 and any positive integer

สุนทรีย์ ธิชากรณ์[1] และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์[2*]
Suntharee Thichakorn and Aiyared Iampan

**บทคัดย่อ**

วัตถุประสงค์หลักของบทความนี้เพื่อศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ สำหรับเพิ่มความสะดวกในการคำนวณและแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของการพิสูจน์และรูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้ โดยทฤษฎีบทที่ใช้เป็นหลักในการพิสูจน์ คือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และใช้จำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการสร้างเลขโดดด้วย ผลการศึกษาพบว่ารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด กับจำนวนเต็มบวก ที่ได้จากการพิสูจน์จะขึ้นอยู่กับจำนวนของเลขโดด และจำนวน $10-n$ และ $n-1$ พร้อมทั้งเสนอแนวทางการพัฒนาการศึกษาของบทความนี้ด้วย

**Abstract**

The objective of this article is to study and find a general form of the product of the many digit number that every digit is and any positive integer, for ease of calculation and show the beauty of a proof and a general form of this product. The main theorem for proof is the Principle of Mathematical Induction and use remainder numbers which is an important tool for the creation of a digit. The results showed that the general form of the product of the many digit number that every digit is and a positive integer obtained from the proof is depended on the number of and the numbers $10-n$ and $n-1$. The development of this study was suggested in this article.

**คำสำคัญ:** ผลคูณ, หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์, จำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด, จำนวนเศษเหลือ

**Keywords:** product, Principle of Mathematical Induction, many digit number that every digit is, remainder number

---

[1]วท.บ. (คณิตศาสตร์) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา
[2]วท.ด. (คณิตศาสตร์) ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา
[*]Corresponding author. E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

## บทนำ

คำว่า "คณิตศาสตร์" ในที่นี้หมายความถึงคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่ว่าด้วยทฤษฎีบทและการพิสูจน์ ซึ่งการพิสูจน์จะต้องเป็นไปอย่างมีขั้นตอน เป็นระบบระเบียบ และความสวยงามที่เกิดจากการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นเสน่ห์เฉพาะตัวที่หาไม่ได้ในศาสตร์อื่น ด้วยเหตุนี้ จึงทำให้เกิดคำถามในแบบนักคณิตศาสตร์ขึ้นเกี่ยวกับความสวยงามของคณิตศาสตร์ที่เราสังเกตเห็นจากผลคูณของจำนวนหกหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด กับจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับสิบ ซึ่งจะกล่าวถึงข้อสังเกตนี้ในหัวข้อถัดไป โดยหวังว่าข้อสังเกตนี้จะนำเราไปสู่รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ ฉะนั้นหากเราสามารถหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนสำหรับการคำนวณหาผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกแม่นยำและรวดเร็วให้มากขึ้นนั่นเอง สำหรับการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนทางพีชคณิตของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด นั้นได้ศึกษาในหลายบทความ ดังนี้ แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข โดยได้พบว่าผลบวกของผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n})^2+\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\#(k)$ แทนจำนวนของจำนวนเต็ม $k$ ใด ๆ ที่เรียงติดกัน เช่น $\underbrace{999999}_{\#(9)=6}$ หรือ $4\underbrace{{}_18{}_18{}_18{}_18{}_18}_{\#({}_18)=5}5$ รุ่งธิวา ธิลาใจ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข กับจำนวนหนึ่งหลัก โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ และ $m$ ซึ่ง $1\le m\le 9$ และกำหนดให้ $9\times m={}_qr$ โดยที่ $0\le q\le 8$ และ $0\le r\le 9$ จะได้ว่า

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}\times m=q\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}r$$

เมื่อ ${}_qr$ แทนจำนวนเศษเหลือสำหรับ $9\times m$ โดยอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554); ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ให้นิยามของจำนวนเศษเหลือสำหรับจำนวนเต็ม $a$ ดังนี้ กำหนดให้ $a$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ จะได้ว่ามีผลหาร $q$ และเศษเหลือ $r$ ที่ทำให้ $a=10\cdot q+r$ และ $0\le r<10$ นั่นคือ $r$ เป็นจำนวนหนึ่งหลักหรือเลขโดดนั่นเอง นิยามจำนวนเศษเหลือสำหรับ $a$ โดย

$$a={}_qr \qquad (1)$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_{0}0 & 10 = {}_{1}0 & 20 = {}_{2}0 & 100 = {}_{10}0 & 250 = {}_{25}0 \\
1 = {}_{0}1 & 11 = {}_{1}1 & 21 = {}_{2}1 & 101 = {}_{10}1 & 251 = {}_{25}1 \\
2 = {}_{0}2 & 12 = {}_{1}2 & 22 = {}_{2}2 & 102 = {}_{10}2 & 252 = {}_{25}2 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
9 = {}_{0}9 & 19 = {}_{1}9 & 29 = {}_{2}9 & 109 = {}_{10}9 & 259 = {}_{25}9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
-0 = {}_{-0}0 & -10 = {}_{-1}0 & -20 = {}_{-2}0 & -100 = {}_{-10}0 & -250 = {}_{-25}0 \\
-1 = {}_{-1}9 & -11 = {}_{-2}9 & -21 = {}_{-3}9 & -101 = {}_{-11}9 & -251 = {}_{-26}9 \\
-2 = {}_{-1}8 & -12 = {}_{-2}8 & -22 = {}_{-3}8 & -102 = {}_{-11}8 & -252 = {}_{-26}8 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
-9 = {}_{-1}1 & -19 = {}_{-2}1 & -29 = {}_{-3}1 & -109 = {}_{-11}1 & -259 = {}_{-26}1
\end{array}$$

เวทิน เกษรพรม และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด $9$ โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ กำหนดให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n})^2 = \underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n-1}1$$

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้นิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 1** (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R} = \{{}_{q}r \mid q, r \in \mathbf{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10\} \qquad \text{(II)}$$

และเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักในหัวข้อต่อไป และนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์จากทฤษฎีบทได้ง่ายขึ้น จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อความสะดวก จะเขียนจำนวนเศษเหลือ ${}_{0}r$ ด้วย $r$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \le r < 10$ และเพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ ซึ่งทำได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย และสำหรับจำนวนในหลักหน่วยให้ดึงเศษลงมาได้เลย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $8_{23}47_{1}9_{18}9_{2}745$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
8_{23}47_1 9_{18} 9_2 745 &= (8+23)4(7+1)(9+18)(9+2)745 \\
&= {}_3148_2 7_1 1745 \\
&= 314(8+2)(7+1)1745 \\
&= 314_1 081745 \\
&= 31(4+1)081745 \\
&= 315081745
\end{aligned}
$$

หัวข้อต่อไปจะแสดงถึงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนหกหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับสิบ จนนำไปสู่การศึกษาผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ผลการศึกษาด้วย

## ข้อสังเกตและรูปแบบทั่วไปที่แน่นอน

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนหกหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวก $n$ เมื่อทำให้เราพบความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจของผลคูณ $999999\times n$ และเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
999999\times 1 &= 0999999 \\
999999\times 2 &= 1999998 \\
999999\times 3 &= 2999997 \\
999999\times 4 &= 3999996 \\
999999\times 5 &= 4999995 \\
999999\times 6 &= 5999994 \\
999999\times 7 &= 6999993 \\
999999\times 8 &= 7999992 \\
999999\times 9 &= 8999991 \\
999999\times 10 &= 9999990
\end{aligned}
\qquad \text{(III)}
$$

สังเกตว่าจำนวนของเลขโดด 9 ของจำนวน 999999 เท่ากับ 6 นั้นมีผลต่อผลคูณของจำนวน 999999 กับจำนวนเต็มบวก $n$ ซึ่งเลขโดดหลักหน่วยของผลคูณ คือเลขโดด $10-n$, เลขโดดหลักล้านของผลคูณ คือเลขโดด $n-1$ และเลขโดดหลักที่เหลือ คือเลขโดด 9 ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ 5 นั่นคือผลคูณของจำนวน 999999 กับจำนวนเต็มบวก $n$ เท่ากับ $(n-1)99999(10-n)$ เมื่อ $1\le n\le 10$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะนำไปสู่การศึกษาของบทความนี้ โดยเริ่มคาดเดาจากข้อสังเกตที่เราพบเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $n=11$

**ตัวอย่าง** 2 จงหาผลลัพธ์ของ $999999 \times 11$

**วิธีทำ** ลองประยุกต์ใช้ข้อสังเกตที่เราพบกับจำนวนเต็มบวก $n=11$ และการแปลงจำนวนเต็มใด ๆ เป็นจำนวนเศษเหลือ จะได้ว่า $10 = {}_10$ และ $10-11=-1={}_{-1}9$ ฉะนั้นผลลัพธ์ของ $999999 \times 11$ สามารถคำนวณได้จากข้อสังเกต ดังนี้

$$\begin{aligned} 999999 \times 11 &= (11-1)99999(10-11) \\ &= (10)99999(-1) \\ &= {}_1099999\,{}_{-1}9 \\ &= 109999(9+(-1))9 \\ &= 10999989 \end{aligned}$$

และจากการคำนวณด้วยวิธีปกติ จะได้ว่า $999999 \times 11 = 10999989$ ดังนั้นผลลัพธ์จากการคำนวณผลคูณ $999999 \times 11$ ด้วยวิธีจากข้อสังเกตที่เราพบนั้นถูกต้อง □

จากตัวอย่าง 2 เราพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่พบ ทำให้เกิดคำถามขึ้นดังต่อไปนี้

1. สามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้หรือไม่

2. หากสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ แล้วรูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้มีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบหรือไม่

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 3 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย ยิ่งไปกว่านั้นยังได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ โดย

$${}_q r \boxplus {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) & ;\ 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a & ;\ r+s \ge 10, r+s = {}_b a \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } {}_q r, {}_t s \in {}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$$

และได้พิสูจน์ว่า $\langle {}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}, \boxplus \rangle$ เป็นกรุป (group) ซึ่งนิยามของกรุปกล่าวไว้ดังนี้ **กรุป** (group) (Rotman, 2005) คือระบบคณิตศาสตร์ $\langle G, \bullet \rangle$ เมื่อ $\bullet$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน $G$ (บางครั้งเราเรียกว่าฟังก์ชัน $\bullet$ สอดคล้องสมบัติการปิด (closure property)) ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติสามข้อ คือสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property) มีเอกลักษณ์ซ้าย (left identity) และทุกสมาชิกมีตัวผกผันซ้าย (left inverse)

**บทตั้ง** 3 ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556) กำหนดให้ $n \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ ดังนั้น

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \quad r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \quad r \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

จากการดำเนินการทวิภาค ( บนกรุปของจำนวนเศษเหลือ ${}_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ พบว่า (มัณฑิยา ครุฑธมงคล และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556)

$$10 - n + 9 = 10 + (9 - n) = {}_1 0 \boxplus (9 - n)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ $n$ เมื่อ $9 - n$ จะต้องถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ ฉะนั้นโดยบทตั้ง 3 ทำให้เราแปลงจำนวน $9 - n$ เป็นจำนวนเศษเหลือได้ดังนี้

$$9 - n = \begin{cases} {}_0(9-n) & ; \quad n \leq 9 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \quad n \geq 10, n - 9 = {}_q r \end{cases}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 10 - n + 9 &= {}_1 0 \boxplus \begin{cases} {}_0(9-n) & ; \quad n \leq 9 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \quad n \geq 10, n - 9 = {}_q r \end{cases} \\ &= \begin{cases} {}_1(9-n) & ; \quad n \leq 9 \\ {}_{-q}(10-r) & ; \quad n \geq 10, n - 9 = {}_q r \end{cases} \end{aligned}$$

ดังนั้นเราสรุปได้เป็นบทตั้งต่อไปนี้

**บทตั้ง** 4 (มัณฑิยา ครุฑธมงคล และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) สำหรับทุกจำนวนนับ $n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 10 - n + 9 &= \begin{cases} {}_1(9-n) & ; \quad n \leq 9 \\ {}_{-q}(10-r) & ; \quad n \geq 10, n - 9 = {}_q r \end{cases} \\ &= {}_1(9-n) \end{aligned}$$

เมื่อ $9 - n$ ถูกแปลงเป็นจำนวนเศษเหลือ

โดยบทตั้ง ทำให้เราสามารถหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวน 999999 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท** 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

$$999999 \times n = (n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n) \qquad \text{(V)}$$

**การพิสูจน์** กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$999999\times n=(n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}999999\times 1 &= 0999999\\ &= (1-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-1)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k$ นั่นคือ

$$999999\times k=(k-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-k)$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned}999999\times(k+1) &= (999999\times k)+(999999\times 1)\\ &= (k-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-k)+0\underbrace{99999}_{\#(9)=5}9\\ &= (k-1)\underbrace{{}_1 8\,{}_1 8\,{}_1 8\,{}_1 8\,{}_1 8}_{\#({}_1 8)=5}(10-k+9)\\ &= (k-1)\underbrace{{}_1 8\,{}_1 8\,{}_1 8\,{}_1 8\,{}_1 8}_{\#({}_1 8)=5}{}_1(9-k)\\ &= (k-1+1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k)\\ &= k\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(9-k)\\ &= ((k+1)-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-(k+1))\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$999999\times n=(n-1)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(10-n)$$

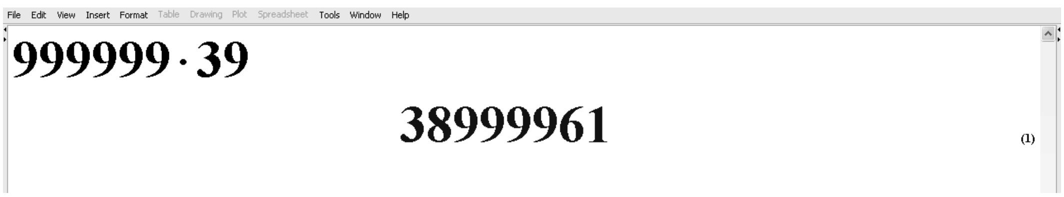
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ $\square$

**ตัวอย่าง 6** จงหาค่าของ $999999 \times 39$

**วิธีทำ** โดยบทตั้ง 3 และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 999999 \times 39 &= (38)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(-29) \\ &= {}_{3}8\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-3}1 \\ &= 38999961 \end{aligned}$$

**ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์**



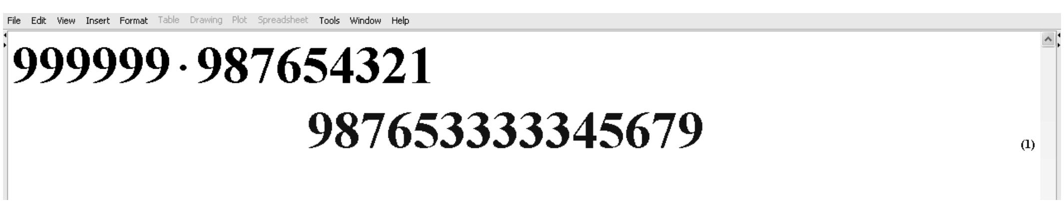

ภาพที่ 1: ผลคูณ $999999 \times 39$

**ตัวอย่าง 7** จงหาค่าของ $999999 \times 987654321$

**วิธีทำ** โดยบทตั้ง 3 และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 999999 \times 987654321 &= (987654320)\underbrace{99999}_{\#(9)=5}(-987654311) \\ &= {}_{98765432}0\underbrace{99999}_{\#(9)=5}{}_{-98765432}9 \\ &= 987653333345679 \end{aligned}$$

**ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์**




ภาพที่ 2: ผลคูณ $999999 \times 987654321$

ในทำนองเดียวเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5 เราสามารถหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ ดังบทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก 8** สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

$$9\times n=(n-1)(10-n) \tag{VI}$$

จากบทแทรก 8 และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนหลักของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 เราสามารถหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 9** สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ และ $m$ จะได้ว่า

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m}\times n=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n) \tag{VII}$$

**การพิสูจน์** กำหนดให้ $P(m)$ แทนข้อความ

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m}\times n=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $m$ โดยบทแทรก 8 จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $k$ นั่นคือ

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k}\times n=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}(10-n)$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$\begin{aligned}
\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k+1}\times n &= (9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k})\times n \\
&= (9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\times n)+(\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k}\times n) \\
&= (n-1)(10-n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}(10-n) \\
&= (n-1)((10-n)+(n-1))\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}(10-n) \\
&= (n-1)9\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}(10-n) \\
&= (n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k}(10-n)
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m}\times n=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n)$$

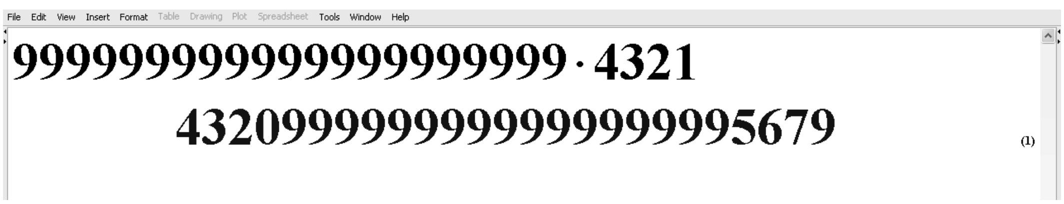
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ และ $m$ □

**ตัวอย่าง 10** จงหาค่าของ $\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=21}\times 4321$

**วิธีทำ** โดยบทตั้ง 3 และทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=21}\times 4321 &= (4320)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=20}(-4311)\\ &= {}_{432}0\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=20}{}_{-432}9\\ &= 4320999999999999999995679\end{aligned}$$

**ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์**




ภาพที่ 3: ผลคูณ

## บทสรุปและแนวทางการพัฒนาการศึกษา

จากการศึกษาเรื่องผลคูณของจำนวนหกหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวก $n$ เมื่อ $1\le n\le 10$ ทำให้ได้รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยอาศัยทฤษฎีบทที่รู้จักกันดี กล่าวคือหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และจำนวนเศษเหลือสำหรับการแปลงจำนวนเต็มใด ๆ มาช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งตอบปัญหาทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

1. เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ดังทฤษฎีบท 9 และสรุปเป็นสูตรสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ และ $m$ ได้ดังนี้

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m}\times n=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n)$$

2. รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนที่ได้ดังทฤษฎีบท 9 นั้นมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบใน (III) นั่นคือผลคูณของจำนวน $m$ หลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด $9$ กับจำนวนเต็มบวก $n$ จะอยู่ในรูปของจำนวนเศษเหลือ โดยที่เลขหลักหน่วย คือ $10-n$, เลขหลักที่มากที่สุด คือ $n-1$ และเลขหลักที่เหลือ คือ เลขโดด $9$ ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ $m-1$

จากบทความนี้และบทความอื่น ๆ ที่ได้กล่าวถึง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่าง ๆ ของจำนวนเต็ม ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ ผู้เขียนคาดว่าน่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

## กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์

## เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. **วารสารนเรศวรพะเยา, 6** (1), 25–30.

มัณฑิยา ครุฑธมงคล และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของ 76923 กับพหุคูณของ 13. **วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 21** (4), 384–390.

รุ่งธิวา ธิลาใจ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 9 กับจำนวนหนึ่งหลัก. **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา, 5** (2), 71–80.

เวทิน เกษรพรม และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 9. **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์, 8** (1), 49–63.

แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6. **วารสารวิทยาศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี, 9** (1), 80–90.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. **วารสารนเรศวรพะเยา,4** (2), 29–35.

_________. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. **วารสารวิทยาศาสตร์ มข, 41** (4), 919–927.

Rotman, J. J. (2005). **A First Course in Abstract Algebra.** Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey. USA.