อินทิกรัลของฟังก์ชัน (Integral of Function)

อินทิกรัล (Integral) คือ ผลลัพธ์ของการคำนวณแบบอินทิเกรต (Integration) คือการคำนวณฟังก์ชันโดยทั่วๆไป เช่นการคำนวณหาพื้นที่ใต้กราฟ หรือหาแรงกระทำต่อวัตถุ

อินทิกรัลสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ

1. อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)
2. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integrals)

<u>อินทิกรัลเบื้องต้น</u>

$$F(x) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}} \rightarrow f(x)$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x) \rightarrow \boxed{\int dx} \rightarrow F(x)$$

การหาอินทิกรัลของฟังก์ชัน

<u>นิยาม</u>

ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆค่า x ของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วจะได้ค่าของ $f(x)$ คือ $F(x) + c$ เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indenfinite integrals) ของ $f(x)$ เทียบกับ x

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล (Integral symbol)

สัญลักษณ์ dx เป็นตัวบ่งชี้ว่าให้ อินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x

สูตรพื้นฐานของอินทิกรัล

1. $\int 1dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + c\,;(n \neq -1)$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$; ให้ a เป็นค่าคงตัวใดๆ
4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
5. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
6. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
7. $\int e^x dx = e^x + c$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
10. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
11. $\int \tan x dx = \ln|secx| + c$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int (2x^3 - cosx + 7)dx$

ใช้สูตร $\int 1dx = x + c$

$\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + c\,;(n \neq -1)$

$\int cosxdx = sinx + c$

$$\int (2x^3 - cosx + 7)dx = 2\int x^3dx - \int cosxdx + 7\int dx$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) - (\sin x + c_2) +$$

$$7(x + c_3)$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + 2c_1 - \sin x - c_2 + 7x + 7c_3$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \sin x + 7x + (2c_1 - c_2 + 7c_3)$$

เพื่อความสะดวกสามารถนำค่าคงที่ตัวที่เกิดจากการอินทิเกรตมารวมกันเป็นค่าคงตัว *C* ตัวเดียวได้จะได้คำตอบเป็น $= \frac{1}{2}x^4 - \sin x + 7x + c$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่าของ $\int (e^x + 4^x)dx$

ใช้สูตร $\int e^x dx = e^x + c$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int (e^x + 4^x)dx = \int e^x dx + \int 4^x dx$$

$$= e^x + c_1 + \frac{4^x}{\ln 4} + c_2$$

$$= e^x + \frac{4^x}{\ln 4} + (c_1 + c_2)$$

$$= e^x + \frac{4^x}{\ln 4} + c$$

<u>การอินทิเกรตโดยการแทนค่า (Integration by Substitution)</u>

ในกรณีที่ไม่สามารถอินทิเกรตตามสูตรได้จะนิยมใช้วิธีการแทนค่ายู (Method of U-Substitution) โดยใช้หลักการดังนี้

1. $f\big(g(x)\big)$ สำหรับการแทนค่า

   $u = g(x), du = g'(x)dx$

2. หาค่าอินทิกรัลในเทอมของ *u*
3. แทนค่า *u* ด้วย *g(x)* จะได้คำตอบอยู่ในเทอมของ *x*

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า $\int (x+4)^5 dx$

อินทิเกรตโดยการแทนค่า *u* โดยที่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$

กำหนดให้ $u = x + 4$, $du = \frac{d}{dx}(x+4)dx$

$$= 1\mathrm{dx}$$

และ $dx = du$

แทนค่าจะได้ $\int (x+4)^5 dx = \int u^5 du$

$$= \frac{u^{5+1}}{5+1} + c$$

$$= \frac{u^6}{6} + c$$

แทนค่า *u* กลับในสมการจะได้

$$= \frac{(x+4)^6}{6} + c$$

ดังนั้นค่าของ $\int (x+4)^5 dx = \frac{(x+4)^6}{6} + c$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า $\int \frac{x^2}{(x^3-1)^5} dx$

อินทิเกรตโดยการแทนค่า *u* โดยที่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$

กำหนดให้ $u = x^3 - 1$, $du = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)dx$

$$= 3x^2 dx$$

และ $dx = \frac{du}{3x^2}$

แทนค่าจะได้ $\int \frac{x^2}{(x^3-1)^5} dx = \int \frac{x^2}{(u)^5} \times \frac{du}{3x^2}$

$$= \int \frac{1}{u^5} \times \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{-5}\, du$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{u^{-4}}{-4} + c$$

$$= -\frac{1}{12u^4} + c$$

แทนค่า *u* กลับในสมการจะได้

$$= -\frac{1}{12(x^3 - 1)^4} + c$$

ดังนั้นค่าของ $\int \frac{x^2}{(x^3-1)^5} dx = -\frac{1}{12(x^3-1)^4} + c$

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เรียกผลลัพธ์ของการอินทิเกรตนี้ว่า อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral) จะแสดงโดย $\int_a^b f(x)dx$ อินทิกรัลจำกัดเขตบางครั้งเรียกว่า รีมันน์อินทิกรัล (Riemann Integral) และผลรวมที่ได้จะเรียกว่า ผลรวมรีมันน์ (Remann Sum)

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\int_1^3 x^2 dx$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{3}\Big|_1^3$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

$$= \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}$$

$$= \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

คำตอบของ $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1} (1-x)^3\, dx$

อินทิเกรตโดยการแทนค่า u โดยที่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$

กำหนดให้ $u = 1 - x$, ดังนั้น ถ้า $x = -1$ แล้ว $u = 1 - (-1) = 2$ และ

ถ้า $x = 1$ แล้ว $u = 1 - 1 = 0$

$$du = \frac{d}{dx}(1-x)dx$$

$$= -dx$$

แทนค่าจะได้ $\int_{-1}^{1} (1-x)^3\, dx = -\int_2^0 u^3 du$

$$= -\frac{u^{3+1}}{4}\Big|_2^0$$

$$= -\frac{u^4}{4}\Big|_2^0$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^3\, dx = -\frac{(2)^4}{4} + \frac{(0)^4}{4}$$

$$= 4$$

คำตอบของ $\int_{-1}^{1} (1-x)^3\, dx = 4$

การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)

ถ้า $u(x)$ และ $V(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้โดยกฎของการหาอนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชันจะได้

$$\int udv = uv - \int vdu$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int x \sin x \, dx$

จากสูตร

$$\int udv = uv - \int vdu$$

กำหนดให้ $u = x \qquad du = dx$

$$dv = \sin x \, dx \qquad v = -\cos x$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$\int x \sin x \, dx = (x)(-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

คำตอบของ $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\int x\sqrt{x+1}dx$

จากสูตร

$$\int udv = uv - \int vdu$$

กำหนดให้ $u = x$ $\qquad du = dx$

$$dv = \sqrt{x+1}dx \qquad v = \int \sqrt{x+1}dx$$

$$v = \int (x+1)^{1/2}\,dx$$

$$v = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

แทนค่า ในสูตร จะได้

$$\int x\sqrt{x+1}dx = x\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right) - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}dx$$

$$= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]$$

$$= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> จงหาค่าของ $\int x^2 \sin x dx$

จากสูตร

$$\int udv = uv - \int vdu$$

กำหนดให้ $u = x^2 \qquad du = 2xdx$

$$dv = \sin x dx \quad v = \int \sin x dx$$

$$= -\cos x$$

แทนค่าลงในสูตรจะได้

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x)\, 2xdx$$

$$= -x^2 \cos x - [-\,2\text{xsin}\, x \int (-2xsinx)\, dx]$$

$$= -x^2 \cos x - [(-2x \sin x) - 2x \cos x]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2x \cos x + C$$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาค่าของ $\int (3x+1)(2x-3)dx$

$$\int (3x+1)(2x-3)dx = \int (6x^2 - 9x + 2x - 3)dx$$

$$= \int (6x^2 - 7x - 3)dx$$

$$= 6\int x^2\,dx - 7\int xdx - 3\int dx$$

$$= (6)\frac{x^3}{3} - (7)\frac{x^2}{2} - 3x$$

$$= 2x^3 - \frac{7x^2}{2} - 3x + C$$