อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

" **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน** " นิยมใช้ในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และงานทางด้านคอมพิวเตอร์ อย่างแพร่หลาย ในบทนี้จะศึกษาแนวคิดของอนุพันธ์ในเชิงเรขาคณิต อัตราการเปลี่ยนแปลง การใช้สูตรทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ และการนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางด้านอุตสาหกรรม

<u>นิยาม : การหาความชันและเส้นสัมผัส</u>

ถ้า $y - f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} . (x-a)$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x,y)$ ใดๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) ความชันของเส้นโค้ง ณ.จุด $P(x,y)$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ. จุด P

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้ $f(x) = 2x^2 + 1$ จงหาความชันของฟังก์ชันที่ $\mathrm{x} = 5$

จาก $f(a+h) = 2(a+h)^2 + 1$

$f(a) = 2a^2 + 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)^2 + 1 - 2a^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2a^2+4ah+2h^2+1-2a^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4a + 2h$$

$$= 4a$$

ดังนั้น ความชันที่ของฟังก์ชันที่ $(\mathrm{x} = 5)$ เท่ากับ $4\,(5) = 20$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาสมการเส้นสัมผัสสมการเส้นสัมผัสสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $f(x) = \sqrt{x+1}$ ที่ *x=8*

จาก $f(a+h) = \sqrt{(a+h)+1}$

$$f(a) = \sqrt{a+1} = \sqrt{8+1} = 3$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(a+h)+1}-\sqrt{a+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(8+h)+1}-\sqrt{8+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} \times \frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{9+h}\right)^2-(3)^2}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+h-9}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+h}+3} = \frac{1}{6}$$

ดังนั้น ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{6}$

สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง (8,3) คือ $y - f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.(x-a)$

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x-8)$$

$$6(y-3) = (x-8)$$

$$6y - 18 = x - 8$$

$$x - 8 + 6y + 18 = 0$$

$$x + 6y + 10 = 0$$

นิยาม : อัตราการเปลี่ยนแปลง

ถ้ากำหนด $y = f(x)$ มีจุด $P(x_1, f(x_1))$ และจุด $Q(x_2, f(x_2))$ อยู่บนกราฟของฟังก์ชันแล้ว ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด *P* และ *Q* คือ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ เรียกอัตราส่วนนี้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ *y* เทียบกับ *x* เมื่อค่าของ *x* เปลี่ยนจาก x_1 เป็น x_2 นิยามได้ดังนี้

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของเส้นรวบวงของวงกลม เทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 5 เซนติเมตร เป็น 8 เซนติเมตร

สูตรหาเส้นรอบวงของวงกลม คือ $2\pi r$ กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเส้นรอบวงของวงกลม (y) กับรัศมีวงกลม (x) จะได้สมการ $f(x) = 2\pi x$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2\pi(8) - 2\pi(5)}{8 - 5} = \frac{16\pi - 10\pi}{3}$$

$$= \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของเส้นรอบวงกลม เทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 5 เซนติเมตร เป็น 8 เซนติเมตร คือ 2π เซนติเมตร/เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 4 ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 12 เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน

ให้ $f(x)$ แทนพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านเท่ากับ x

$\therefore f(x) = x^2$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวด้านที่เปลี่ยนไปคือ

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(12)^2 - (10)^2}{12 - 10} = \frac{144 - 100}{2}$$

$= 22$ ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเทียบกับความยาวของด้าน เท่ากับ 22 ตารางเซนติเมตร/เซนติเมตร

นิยาม : อัตราการเปลี่ยนแปลง ขณะที่ *x=a*

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ *y* เทียบกับ *x* ขณะใดๆ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเมื่อค่า *x* เปลี่ยนแปลงไปน้อยมาก จึงต้องใช้ลิมิตช่วยในการหาคำตอบ โดย $x_1 = a$ มีค่าใดๆ กำหนดให้ค่าของ$x_2 = a + h$ ให้ *h* มีค่าน้อยมากๆจนเข้าใกล้ 0

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $f(x) = 2\pi x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลง ขณะที่ x=2

$$f(a) = 2\pi a = 4\pi$$

$$f(a+h) = 2\pi(a+h) = 2\pi(2+h)$$

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\pi(2+h)-4\pi}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4\pi+2\pi h-4\pi}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\pi = 2\pi$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ *y* เทียบกับ *x* ขณะที่ *x=2* คือ 2π เซนติเมตร/เซนติเมตร

การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร (Derivative Fomula)

ในบางครั้งการหาอนุพันธ์โดยใช้ทฤษฎีของลิมิต ค่อนข้างทำได้ยาก จึงมีการสร้างสูตรสำหรับหาค่าของอนุพันธ์ขึ้นมาจากนิยาม คือ เมื่อให้ *f* เป็นฟังก์ชันที่มี *x* เป็นตัวแปรอิสระและ *y* เป็นตัวแปรตาม *f* เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ *x* ใดๆก็ต่อเมื่อ $lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ สามารถนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่ *x=a* เป็นสัญลักษณ์ $f'(a), \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$

จากนิยามจะได้ว่า $f'(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

การอ่านสัญลักษณ์ $f'(x)$ อ่านว่า เอฟไพร์มของเอกซ์

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์โดยที่เอกซ์เท่ากับเอ

$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ อ่านว่า ดีเอฟของเอกซ์บายดีเอกซ์โดยที่เอกซ์เท่ากับเอ

สูตรอนุพันธ์ *differential* ที่นิยมใช้

1. $\frac{dc}{dx} = 0$

2. $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

3. $\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(f)(g) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$

6. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

7. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

8. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

9. $\frac{d}{dx}\log_a|x| = \frac{1}{x\ln a}$

10. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

11. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

12. $\frac{d}{dx}\tan x = sec^2 x$

13. $\frac{d}{dx}arc\sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\frac{d}{dx}arc\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{d}{dx}arc\tan x = \frac{1}{1+x^2}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $f(x) = x^4 + x^2$ จงหา $f'(x)$

$$f(x) = x^4 + x^2$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}x^2$$

ใช้สูตร $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 4x^{4-1} + 2x^{2-1}$$

$$= 4x^3 + 2x$$

ดังนั้น $f'(x)$ เท่ากับ $4x^3 + 2x$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$

$$y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}(f)(g) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$

กำหนดให้ $f = x^2 - 2x + 3$ และ $g = 2x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 2x + 3)\frac{d}{dx}(2x + 5) + (2x + 5)\frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 3)$$

$$= (x^2 - 2x + 3)(2) + (2x + 5)(2x - 2)$$

$$= 2x^2 - 4x + 6 + 4x^2 - 4x + 10x - 10$$

$$= 6x^2 + 2x - 4$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 5)$ เท่ากับ $6x^2 + 2x - 4$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x+2)}$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx}-f\frac{dg}{dx}}{g^2}$

โดยที่ $f = (x^2 - 1)$

$g = (x + 2)$

แทนค่าลงในสูตร $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(x+2)\frac{d}{dx}(x^2-1)-(x^2-1)\frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(x+2)(2x)-(x^2-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$$

ดังนั้นคำตอบของอนุพันธ์ คือ $\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3}{10} ln|8 + 5x^2|$

ใช้สูตร $\frac{d}{du}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{du}\frac{3}{10} ln|8 + 5x^2| = \frac{3}{10}\frac{d}{du} ln|8 + 5x^2|$$

$$= \frac{3}{10}\frac{1}{(8 + 5x^2)}\frac{d}{dx}(8 + 5x^2)$$

$$= \frac{3}{10}\frac{1}{(8 + 5x^2)}(10x)$$

$$= \frac{30x}{80 + 50x^2}$$

ดังนั้นคำตอบของอนุพันธ์ คือ $\frac{30x}{80+50x^2}$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> จงหาอนุพันธ์ของ $y = 4\cos x + 2\sin x$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ และ $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}\cos x + 2\frac{d}{dx}\sin x$$

$$= 4(-\sin x) + 2(\cos x)$$

$$= 2\cos x - 4\sin x$$

$$= 2(\cos x - 2\sin x)$$

ดังนั้นคำตอบของอนุพันธ์ คือ $2(\cos x - 2\sin x)$

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหาอนุพันธ์ของ $y = (3x^2)(x^2 + 3)$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}((f)(g)) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$

$f = 3x^2$ และ $g = x^2 + 3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2\frac{d}{dx}(x^2 + 3) + x^2 + 3\frac{d}{dx}(3x^2)$$

$$= [(3x^2)(2x)] + [(x^2 + 3)(6x)]$$

$$= 6x^3 + 6x^2 + 18x$$

$$= 6x(x^2 + x + 3)$$

ดังนั้นคำตอบของอนุพันธ์ คือ $6x(x^2 + x + 3)$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{3}{3x^2+1}$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx}-f\frac{dg}{dx}}{g^2}$

โดยที่ $f = 3$ และ $g = 3x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[(3x^2+1)\frac{d}{dx}3\right] - \left[(3)\frac{d}{dx}(3x^2+1)\right]}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+1)(0) - (3)(6x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-18x}{(3x^2+1)^2}$$

ดังนั้นคำตอบของอนุพันธ์ คือ $\frac{-18x}{(3x^2+1)^2}$

ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

ถ้ากำหนดให้ Z เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรอิสระ X และ Y เขียนในรูปของ $Z = f(x, y)$ กำหนดให้ y เป็นค่าคงตัวชั่วขณะแล้วฟังก์ชัน $Z = f(x, y)$ ก็จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร X เท่านั้น สามารถหาอนุพันธ์ของ Z เทียบกับตัวแปร X ได้ และเรียกอนุพันธ์นี้ว่า อนุพันธ์ย่อยของ Z เทียบกับ X

<u>นิยาม :</u> ให้ $Z = f(x, y)$<u>เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรอิสระ x และ y อนุพันธ์ย่อยของ Z หรือ</u> $f(x, y)$ เทียบกับ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{\partial z}{\partial x}$ หรือ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ โดยที่

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \qquad \text{(ถ้าลิมิตหาค่าได้)}$$

หมายเหตุ เรียกสัญลักษณ์ ∂ (Curl) ว่า เครื่องหมายอนุพันธ์ย่อย

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $z = x^4 - 10xy^2 + y$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$

วิธีทำ จาก $z = x^4 - 10xy^2 + y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^4 - 10xy^2 + y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^4) - \frac{\partial}{\partial x}(10xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y)$$

$$= 4x^3 - 10y^2 + 0$$

$$= 4x^3 - 10y^2$$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $f(x,y) = 2x^3y^2 + 6x + 2y$ จงหา $f_x(1,3)$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = 2x^3y^2 + 6x + 2y$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2 + 6x + 2y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(6x) + \frac{\partial}{\partial x}(2y)$$

$$= 6x^2y^2 + 6 + 0$$

$$= 6x^2y^2 + 6$$

แทนค่า $x=1$ และ $y=3$ ในอนุพันธ์ย่อยที่ได้จะได้

$$f_x(1,3) = 6(1)^2(3)^2 + 6$$

$$= 60$$