ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน *(Continuity of function)*

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ *f* เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง *f* เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ *x=a* ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x\to a} f(a)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(a)$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าขาดสมบัติเพียงข้อเดียวถือว่า *f* ไม่ต่อเนื่องที่ *x=a*

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = 4x + 3$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ x=3 หรือไม่

พิจารณานิยามทั้ง 3 ข้อ

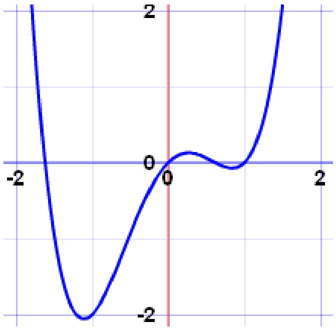
1. $f(3) = 4(3) + 3 = 15$
2. $\lim_{x\to 3} f(3) = \lim_{x\to 3} 4x + \lim_{x\to 3} 3$
   $= 4(3) + 3$
   $= 15$
3. $f(3) = \lim_{x\to 3} f(3)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x=3

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

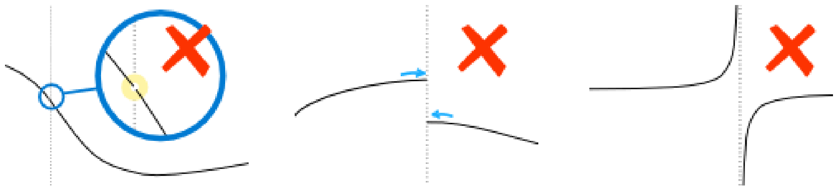
1. ฟังก์ชันพหุนาม$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ หรือ $a \in R$
2. เมื่อ $p(x)$ และ $q(a)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ เมื่อ $a \in R$ โดยที่ $q(a) \neq 0$
3. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ ที่ $\mathrm{x} = f(a)$ แล้ว gof เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$
4. ถ้า $f(x)$และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ และ C เป็นจำนวนจริงใดๆแล้ว $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ และ $cf(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ และ $\frac{f(x)}{g(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

การพิจารณาโดยวิธีการเขียนกราฟ



รูปที่ 1 กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง

เมื่อนำคำตอบของฟังก์ชันมาเขียนกราฟ จะสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ ดังภาพที่ 1 ถ้านำคำตอบของฟังก์ชันมาเขียนกราฟแล้วเส้นของกราฟมีช่องว่างไม่เป็นเส้นเดียวกันจะเรียกว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องดังรูปที่ 2

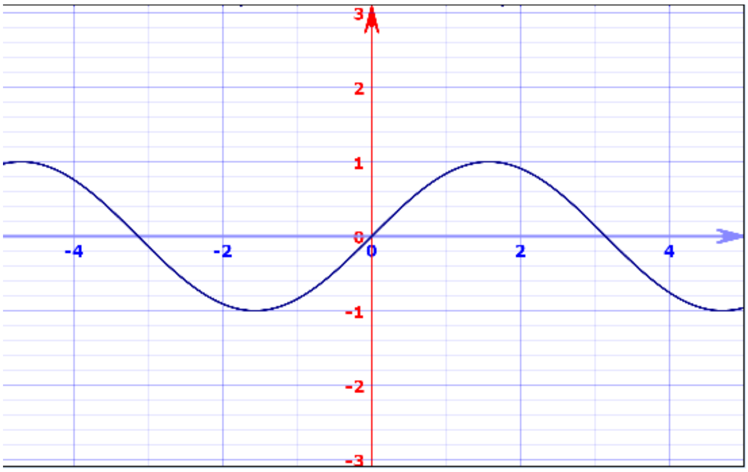


รูปที่ 2 กราฟของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

__ตัวอย่างที่ 2__ $f(x) = \sin x$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ โดยการเขียนกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
sinx	0.96	0.76	-0.14	-0.91	-0.84	0	0.84	0.91	0.14	-0.76	-0.96

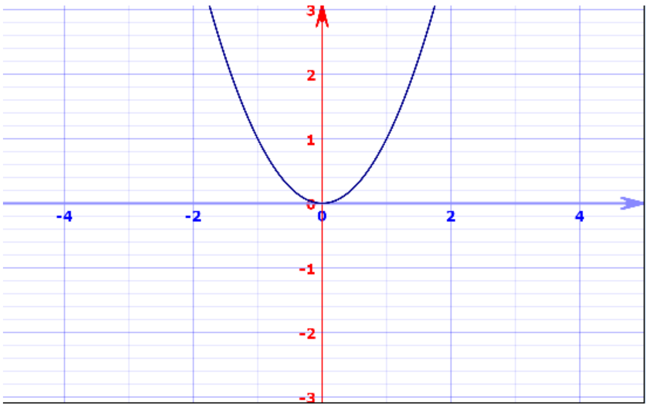
นำค่ามาเขียนกราฟ



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = \sin x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $f(x) = x^2$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ โดยการเขียนกราฟ

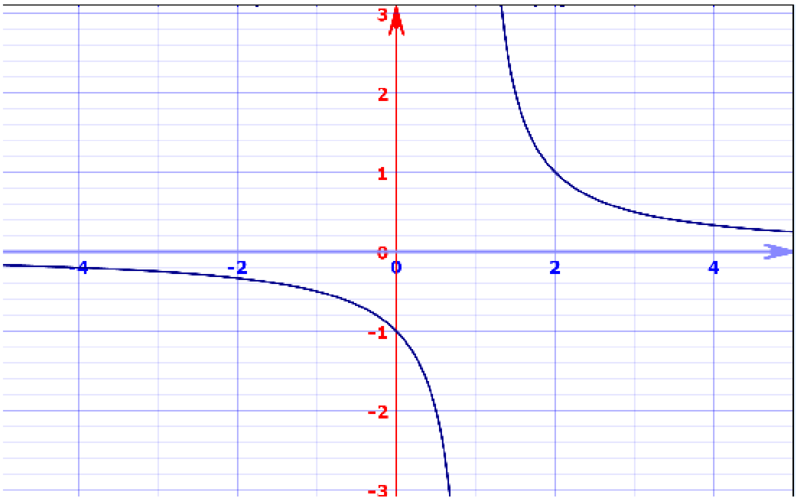
f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
X^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ โดยการเขียนกราฟ

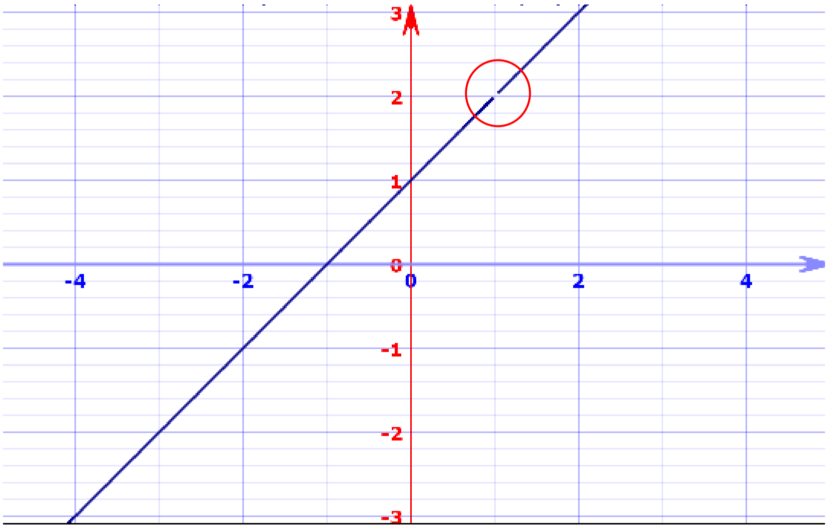
f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{(x-1)}$	-0.17	-0.2	-0.25	-0.33	-0.5	-1	-	1	0.5	0.33	0.25



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ เกิดความไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x = 1 เพราะเมื่อ *x* เท่ากับ 1 ฟังก์ชันจะหาค่าไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ *x=1*

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ โดยการเขียนกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{(x^2-1)}{(x-1)}$	-4	-3	-2	-1	0	1	-	3	4	5	6



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ เกิดความไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x = 1 เพราะเมื่อ *x* เท่ากับ 1 ฟังก์ชันจะหาค่าไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ *x=1*

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x-5; x \neq 1 \\ 2; x = 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ x=1 หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(1) = 2 = 2$
2. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 3(1) - 5 = -2$
3. $f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$

ดังนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x=1

ตัวอย่างที่ 7 ฟังก์ชัน $f(x) \begin{cases} 2x+1; x > 5 \\ 9; x = 5 \\ x+3; x < 5 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ *x=5* หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(5) = 9$
2. $\lim_{x \to 5^-} f(5) = 5 + 3 = 8$ และ $lim_{x \to 5^+} f(5) = 2(5) + 1 = 11$

3. คำตอบของ $f(5) \neq lim_{x \to 5^-} f(5) \neq lim_{x \to 5^+} f(5)$

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ *x=5*

<u>*ตัวอย่างที่ 8*</u> ฟังก์ชัน $f(x) \begin{cases} x^2 + 4; x < 2 \\ 5; x = 2 \\ x^3; x > 2 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ *x=2* หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(2) = 5$
2. $\lim_{x \to 2^+} f(2) = (2)^3 = 8$ และ $lim_{x \to 2^-} f(2) = (2)^2 + 4 = 8$
3. คำตอบของ $f(52) \neq lim_{x \to 2^-} f(2) \neq lim_{x \to 2^+} f(2)$

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ *x=2*

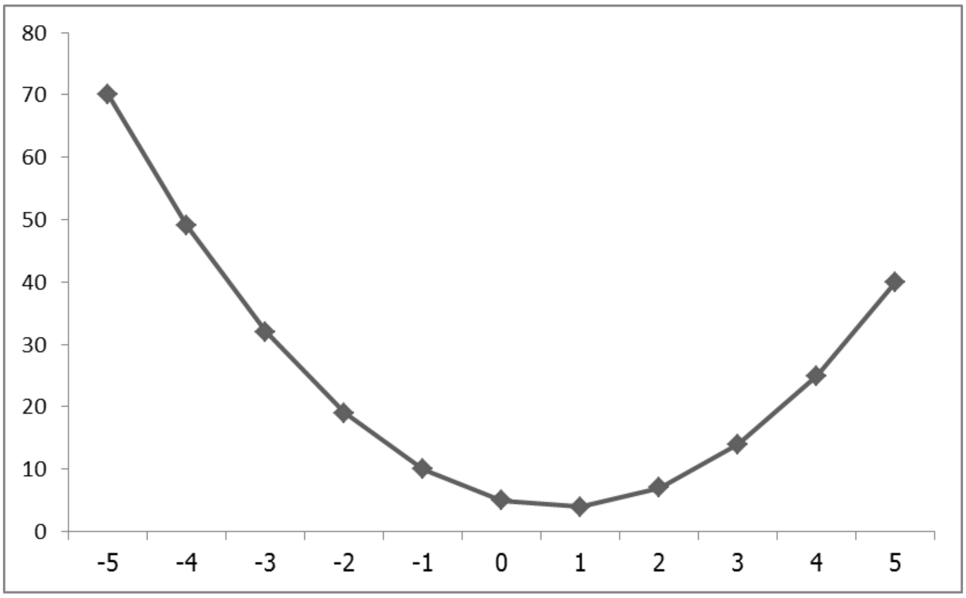
<u>*ตัวอย่างที่ 9*</u> จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ มีความต่อเนื่องที่ x=1

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 4$
2. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x^2 - \lim_{x \to 1} 3x + \lim_{x \to 1} 5$
   $= 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 4$
3. $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$ ดังนั้น ฟังก์ชันจึงมีความต่อเนื่องที่ x=1

พิจารณาจากกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2x^2 - 3x + 5$	70	49	32	19	10	5	4	7	14	25	40



จากกราฟแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ x=1

ตัวอย่างที่ 10 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$ มีความต่อเนื่องที่ x=-2 หรือไม่

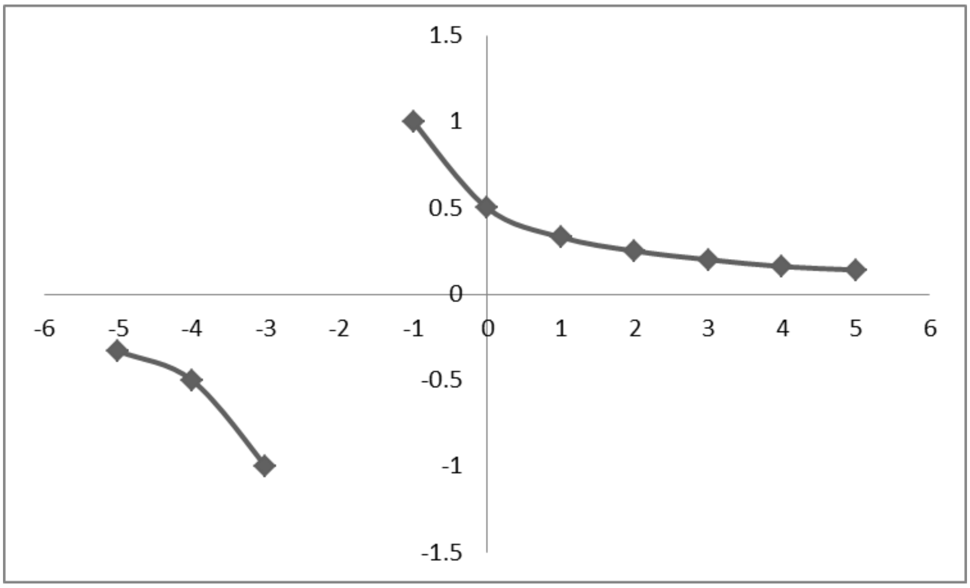
พิจารณาตามนิยาม

1. $f(-2) = \frac{1}{(-2)+2} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$ ไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x=-2

พิจารณาจากกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \frac{1}{(x+2)}$	-0.33	-0.5	-1	-	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.16	0.14



จากกราฟแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องเมื่อ x=-2

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$ มีความต่อเนื่องที่ x=5 หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

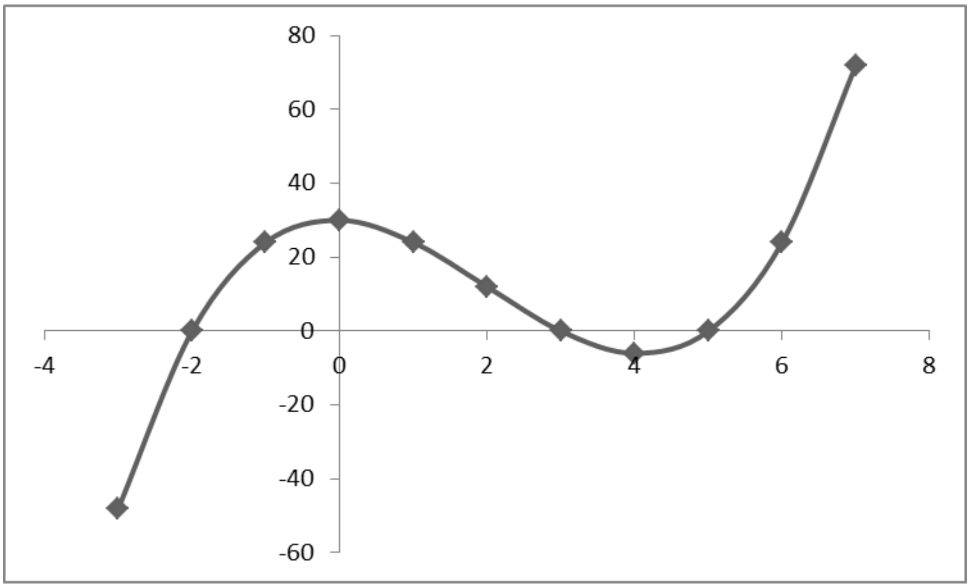
1. $$\begin{aligned} f(5) &= (5)^3 - 6(5)^2 - (5) + 30 \\ &= 125 - 150 - 5 + 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \lim_{x\to 5} f(5) &= \lim_{x\to 5}(5)^3 - 6\lim_{x\to 5}(5)^2 - \lim_{x\to 5} 5 \\ &\quad + \lim_{x\to 5} 30 \\ &= 125 - 150 - 5 + 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. $f(5) = \lim_{x\to 5} f(5)$ จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ *x=5*

พิจารณาจากกราฟ

f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$	-48	0	24	30	24	12	0	-6	0	24	72



จากกราฟแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องเมื่อ x=5

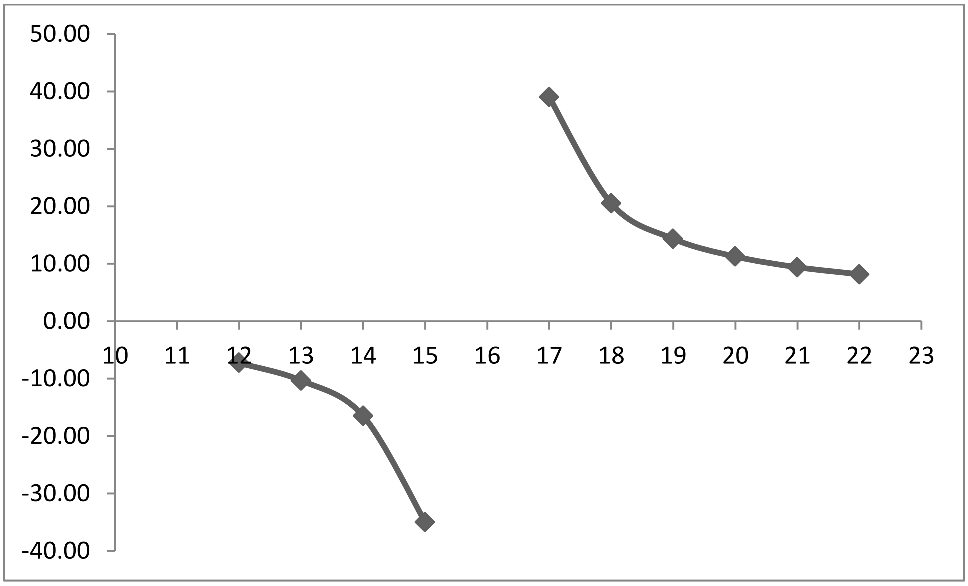
<u>ตัวอย่างที่ 12</u> จงพิสูจน์ว่า $f(x) = \frac{2x+5}{x-16}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ เมื่อ x=16

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(16) = \frac{2(16)+5}{16-16} = \frac{37}{0}$ (ไม่สามารถหาค่าได้)
   ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x) = \frac{2x+5}{x-16}$ เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x=16

พิจารณาจากกราฟ

f(x)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$f(x) = \frac{2x+5}{x-16}$	-7.25	-10.3	-16.5	-35	-	39	20.5	14.33	11.25	9.4	8.17



จากกราฟแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องเมื่อ x=16